ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

& ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: *18 /05 /2016*

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A_1. Σχολικό βιβλίο σελ. 262 - 263

A_2. Σχολικό βιβλίο σελ. 141

A_3. Σχολικό βιβλίο σελ. 246

A_4. i) Λ ii) Σ iii) Λ iv) Σ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

B_1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(x^2+1)-x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄	-	0	+
f	↘	τ.ε	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και παρουσιάζει στο $x_0=0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$

B₂. Η f΄ είναι παραγωγίσιμη ως ρητή στο $\mathbb{R}$.

$$f''(x)=\frac{(2x)'\left(x^2+1\right)^2-2x\left[\left(x^2+1\right)^2\right]'}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1-4x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{2\cdot\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$1-3x^2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f΄΄		-	0	+	0	-	
f		∩		∪		∩	
			Σ.Κ		Σ.Κ		

Η f κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

Η f παρουσιάζει σημεία καμπής στο $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ με

$$f(x_1) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4} \text{ το } A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right) \text{ και στο } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ με}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4} \text{ το } B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

B3. Αφού $A_f = \mathbb{R}$ η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

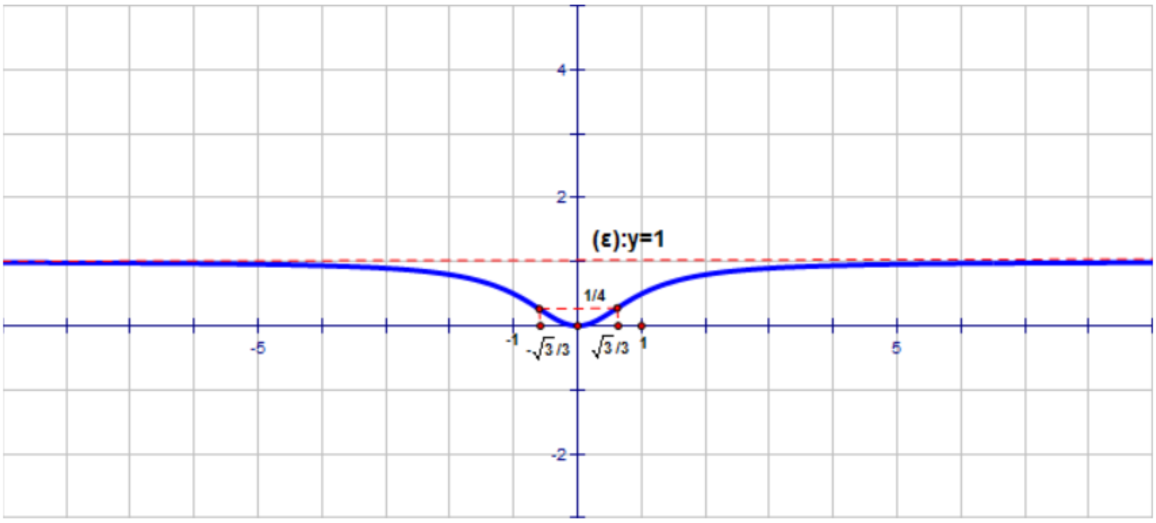
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Συνεπώς η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $(\varepsilon): y = 1$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Επειδή έχει οριζόντιες ασύμπτωτες δεν έχει πλάγιες.

B4. Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα **B1**, **B2**,**B3** σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και την γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f΄		-		-	0	+		+	
f΄΄		-	0	+		+	0	-	
f	**1**	↘	Σ.Κ 1/4	↘	0 Τ.ε	↗	Σ.Κ 1/4	↗	**1**



ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Έστω συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

Η $g(x)=0$ έχει προφανή ρίζα το $x=0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\cdot\left(e^{x^2}-1\right)=0$ οι ρίζες της εξίσωσης είναι μόνο η $x=0$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2}-1\right)>0$ με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων έχουμε

x	0		1		+∞
2x		+	0	-	
$e^{x^2}-1$		+		-	
$2xe^{x^2}-1$		+		−	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘		↗	

Ο.Ε(0,0)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq g(0) <=> g(x) \geq 0$ άρα η x = 0 μοναδική λύση ως θέση ακροτάτου.

Γ$_2$.

$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 <=>$

$<=> |f(x)| = \left|e^{x^2} - x^2 - 1\right| = e^{x^2} - x^2 - 1$

Καθώς από Γ$_1$ ισχύει $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$

Είναι f συνεχής και $f(x) \neq 0$ για $x \neq 0$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ άρα

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R},$ ή $f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1, x \in \mathbb{R},$ ή

ή $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & , x \leq 0 \\ -e^{x^2} + x^2 + 1 & , x > 0 \end{cases}$

Γ$_3$. $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)' = 2xe^{x^2} - 2x$ και

$f''(x) = \left(2xe^{x^2} - 2x\right)' = e^{x^2}4x^2 + 2e^{x^2} - 2$

Θέτουμε $f''(x) = 0$ η οποία έχει προφανή ρίζα $x = 0$

$f^{(3)}(x) = \left(e^{x^2}4x^2 + 2e^{x^2} - 2\right)' = 2xe^{x^2}4x^2 + 8xe^{x^2} + 2e^{x^2}2x =$

$= 4xe^{x^2}\left(2x^2 + 3\right)$

$f^{(3)}(x) = 0 <=> 4xe^{x^2}\left(2x^2 + 3\right) = 0 <=> x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f^{(3)}(x)$	-	0	+
$f''(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$x<0 \overset{f''\downarrow}{\Rightarrow} f''(x)>f''(0) \Leftrightarrow f''(x)>0$$

$$x>0 \overset{f''\uparrow}{\Rightarrow} f''(x)>f''(0) \Leftrightarrow f''(x)>0$$

Οπότε η f κυρτή $\mathbb{R}$ διότι η f΄΄ συνεχής στο $x_0=0$.

Γ$_4$. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=f(x+3)-f(x)$, οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται:

$\varphi(|\eta\mu x|)=\varphi(x),\ x\geq 0$

Παραγωγίζουμε τη σχέση και έχουμε: $\varphi'(x)=f'(x+3)\cdot 1-f'(x)=f'(x+3)-f'(x)$

Όμως έχουμε $f''(x)>0$ άρα f' γνησίως αύξουσα

$x+3>x \Leftrightarrow f'(x+3)>f'(x)$ επομένως $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Οπότε έχουμε: φ γνησίως αύξουσα επομένως και 1 – 1.

Έτσι: $\varphi(|\eta\mu x|)=\varphi(x) \overset{\varphi:1-1}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x|=x$

Άρα μοναδική ρίζα η $x=0$ διότι το $|x|\geq|\eta\mu x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο στο 0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ$_1$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$. Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Rightarrow f(x)=g(x)\eta\mu x, x\neq 0$. Παίρνοντας τα όρια έχω:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\eta\mu x\right) \overset{\text{συνεχής}}{\Rightarrow} f(0)=1\cdot 0=0$$

$1^{\text{ο}}$ μέλος = $\int_0^\pi\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi\left(f'(x)\right)'\eta\mu x dx=$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x dx\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\left(\eta\mu x\right)'dx=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx-\left(\left[\int_0^\pi f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'dx\right)=\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx-\left(f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi-f(0)\sigma\upsilon\nu 0\right)-\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx=$$

$f(\pi)-f(0)=f(\pi)-0=f(\pi)$. Άρα f(π) = π

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{f'(0)}{1}=f'(0)\quad (f'\text{συνεχής αφού υπάρχει η } f'').$$

Δ₂. **α)** Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in R$ άρα από Θεώρημα Fermat: $f'(x_0)=0$. Παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση έχω: $e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x$. Για $x=x_0$ έχω: $e^{f(x_0)}f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow 0+1=0+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow e^{x_0}=e^0\Leftrightarrow x_0=0$

ΑΤΟΠΟ γιατί f΄(0) = 1

β) f΄ συνεχής στο R (2 φορές παραγωγίσιμη)

$f'(x)\neq 0, x\in R$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Έχουμε $f'(0)=1>0$, επομένως $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R\Rightarrow f\uparrow$ στο R

Δ₃. Επειδή το $x\to+\infty$, περιοριζόμαστε στο $[0,+\infty)$

$x>0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(0)=0$. Επειδή $f(R)=(-\infty,+\infty)$ με $f\nearrow$ και συνεχή τότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)}\leq\frac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)}\leq\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}=\frac{2}{f(x)}\Leftrightarrow$$

$-\frac{2}{f(x)}\leq\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\frac{2}{f(x)}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f(x)}\right)=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{f(x)}$, άρα από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$$

Δ₄. Υπολογίζω το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_1^{e^\pi}\left(\frac{f(\ln x)}{x}\right)dx=\int_1^{e^\pi}f(\ln x)(\ln x)'dx=\int_1^{e^\pi}f(\ln x)\frac{1}{x}dx\overset{\text{θέτω } u=\ln x}{=}\int_0^\pi f(u)du$$

$$du=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx$$

$$x=1\Leftrightarrow u=\ln 1=0$$

$$x=e^\pi\Leftrightarrow u=\ln e^\pi=\pi$$

Από $0 \le u \le \pi \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(u) \le f(\pi)$. Η ισότητα ισχύει για u = 0 και u = π , άρα:

$$\int_0^{\pi} du < \int_0^{\pi} f(u)du < \int_0^{\pi} f(\pi)du \Leftrightarrow \left(\text{με απόδειξη του } f(x) \ge g(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ge \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx\right)$$

$$0 < \int_0^{\pi} f(u)du < \pi(\pi - 0) \Leftrightarrow$$

$$0 < \int_0^{\pi} f(u)du < \pi^2$$